Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Для билета

Вариант задания 1

Лист работы 1 из 4

№1 ~~Дано~~ $t = [\text{мин}]$; $m[\text{кг}]$; $\Rightarrow v_i = [\frac{\text{кг}}{\text{мин}}]$ для 1 человека.

ПН: $(v_c + v_A) \cdot 9 = 0,5$ (1)

ВТ: $(v_p + v_A) \cdot 12 = 0,5$ (2)

СР: $(v_c + v_p) \cdot 18 = 0,5$ (3)

$t = \frac{1\text{кг}}{v_c + v_A + v_p} - ?$

(1) и (3): $9v_c + 9v_A = 18v_c + 18v_p \mid :9$

$v_c + v_A = 9v_c + 9v_p$; $v_A = 8v_c + 9v_p$

(2): $(v_p + v_A) \cdot 12 = (v_p + 8v_c + 9v_p) \cdot 12 = 0,5$;

$10v_p + 8v_c = \frac{0,5}{12} = \frac{5}{10 \cdot 12} = \frac{5}{120}$;

$v_p = \frac{\frac{5}{120} - 8v_c}{10} = \frac{5 - 8 \cdot 120 v_c}{120 \cdot 10}$

(3): $(v_c + v_p) \cdot 18 = 0,5 \Leftrightarrow (v_c + \frac{5 - 8 \cdot 120 v_c}{120 \cdot 10}) \cdot 18 = 0,5$

$18v_c + \frac{18 \cdot (5 - 8 \cdot 120 v_c)}{120 \cdot 10} = 0,5$; $18v_c + \frac{3(5 - 8 \cdot 120 v_c)}{200} = 0,5$

$200 \cdot 18 v_c + 3(5 - 8 \cdot 120 v_c) = 100$

$3600 v_c + 15 - 2880 v_c = 100$; $720 v_c = 85 \Rightarrow$

$\Rightarrow v_c = \frac{85}{720} = \frac{5 \cdot 17}{10 \cdot 72} = \frac{5 \cdot 17}{5 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 9} = \frac{17}{144} \left[\frac{\text{кг}}{\text{мин}}\right]$

$\Rightarrow v_p = \frac{5 - 8 \cdot 120 \cdot \frac{17}{144}}{120 \cdot 10} = \frac{5 - \frac{340}{3}}{120 \cdot 10} = \frac{15 - 340}{3 \cdot 120 \cdot 10}$

№2 $(y-2)(3x-12) = 5x^2 - 21x + 4$

Рассмотрим правую часть рав-ва:

$5x^2 - 21x + 4 = (x-4)^2 + 4x^2 - 13x - 12$ $\quad x, y \in \mathbb{Z}$

$(y-2)(3x-12) = (y-2) \cdot 3(x-4)$

$3(y-2)(x-4) = (x-4)^2 + 4x^2 - 13x - 12$

$(x-4)(3(y-2) - (x-4)) = 4x^2 - 13x - 12$

$(x-4)(3y-6-x+4) = 4x^2 - 13x - 12$

$(x-4)(3y-x-2) = 4x^2 - 13x - 12$

Рассмотрим правую часть:

$4x^2 - 13x - 12$; разложим на мн.

$4x^2 - 13x - 12 = 0$; $D = 19^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2 - 13x - 12 = (x-4)(4x+3)$

$(x-4)(3y-x-2) = (x-4)(4x+3)$

$(x-4)(3y-x-2) - (x-4)(4x+3) = 0$

$(x-4)(3y-x-2-(4x+3)) = 0$

$(x-4)(3y-x-2-4x-3) = 0$; $(x-4)(3y-5x-5) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x-4=0 & (1) \\ 3y-5x-5=0 & (2) \end{cases}$

(1): Если $x-4=0 \Leftrightarrow x=4$;

$3y-5x-5 = 3y-20-5 = 3y-25 \Rightarrow$

$\Rightarrow y \in \mathbb{Z}$

(2): Если $3y-5x-5=0 \Rightarrow y = \frac{5x+5}{3}$, $y \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5x+5 \vdots 3 \Rightarrow 5(x+1) \underset{3}{\equiv} 0$, т.к. $(5,3)=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x+1 \underset{3}{\equiv} 0 \Rightarrow x \underset{3}{\equiv} 2$, т.е. Решим диофантовое ур-е $3y-5x-5=0$

П $y=5$; $x=2$: $15-10-5=0$; $3y-5x-5 = 3 \cdot 5 - 5 \cdot 2 - 5$;

$3y-5(x+1) = 3 \cdot 5 - 5 \cdot 3$; $3(y-5) = 5(x+1-3)$;

$3(y-5) = 5(x-2) \Rightarrow$ т.к. $(3,5)=1 \rightarrow y-5 = 5k_1$, $k_1 \in \mathbb{Z}$

и $x-2 = 3k_1$, $k_1 \in \mathbb{Z}$; $\begin{cases} y-5 = 5k_1 \\ x-2 = 3k_1 \end{cases}$, $k_1 \in \mathbb{Z}$

olymp.bmstu.ru

Продолжение №2

Получается, что:

1) Если $x = 4$, то $y - $ любое $\in \mathbb{Z}$

2) Если $3y - 5x - 5 = 0$, то соблюдается система

$$\begin{cases} y - 5 = 5k_1 \\ x - 2 = 3k_1 \end{cases}, k_1 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5k_1 + 5 \\ x = 3k_1 + 2 \end{cases}, k_1 \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $(x, y) = (4, $ любое $\in \mathbb{Z})$

$(x, y) = (3k_1 + 2; 5k_1 + 5), k_1 \in \mathbb{Z}$, т.е. решения корни ур-я имеют вид такой.

№4

$$\left| \frac{x(x^2-3) + (x+2)^2 - (x^3+6)}{x + \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} - 1} \right| = a^2 + 1$$

, заметим, что $a^2 + 1 \geq 0 \rightarrow$ неравенство верное.

Рассмотрим числитель:

$$x(x^2-3) + (x+2)^2 - (x^3+6) = x^3 - 3x + (x^2 + 4x + 4) - x^3 - 6 =$$

$$= -3x + x^2 + 4x + 4 - 6 = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$$

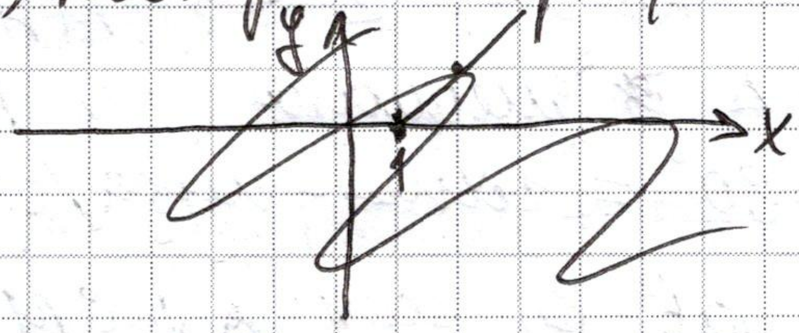
Рассмотрим знаменатель: $x + \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} - 1 = x + 3 - 1 =$

$= x + 2$

Рассмотрим всю дробь:

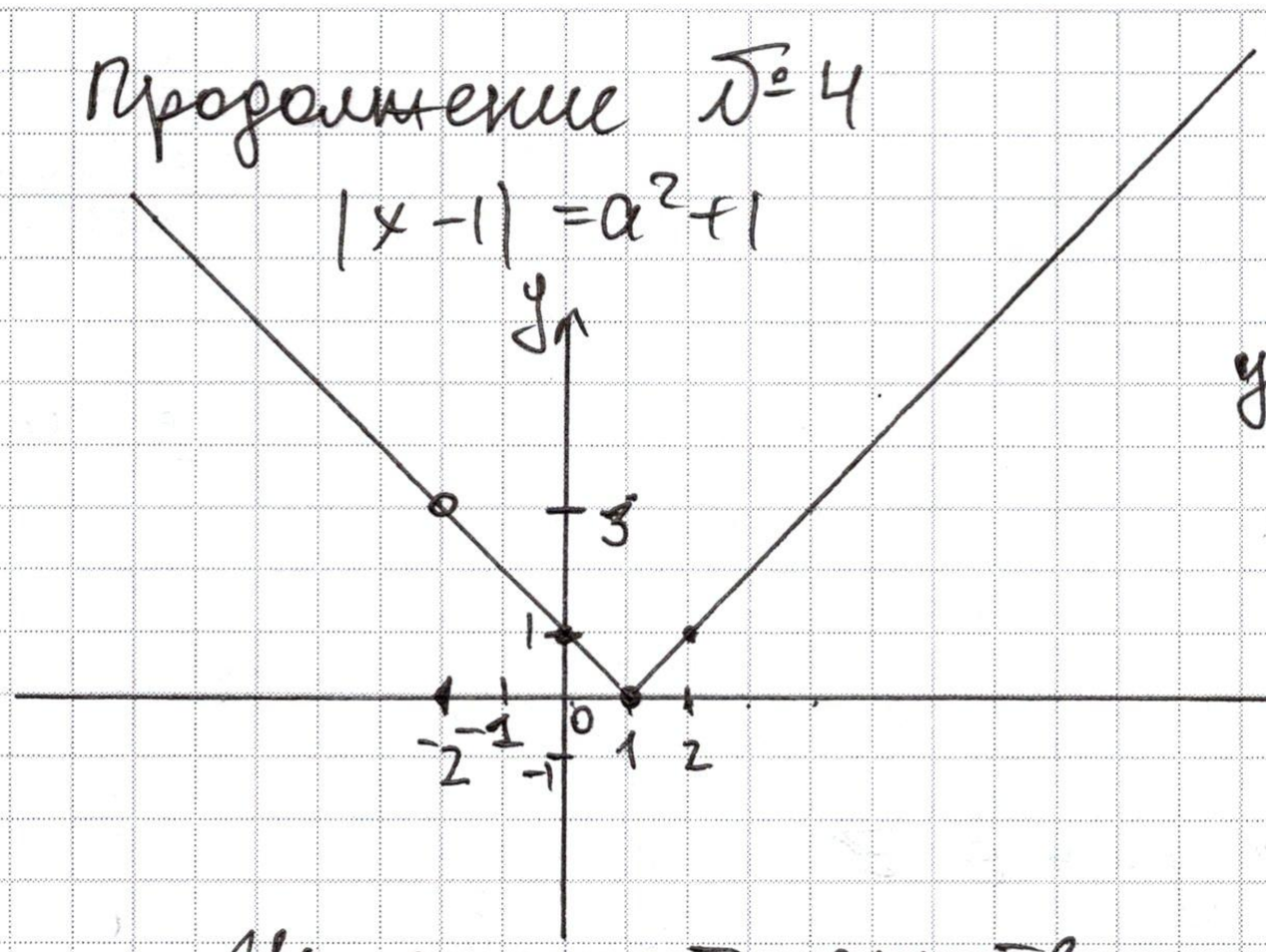
$$\left| \frac{(x-1)(x+2)}{(x+2)} \right| = a^2 + 1; \text{ ОДЗ: } x + 2 \neq 0; \; x \neq -2$$

$|x - 1| = a^2 + 1$; Построим график левой части рав-ва:



Продолжение №4

$|x-1| = a^2+1$



При каких значениях a ур-е имеет единств. отр. решение?

Заметим, что a^2+1 для графика — некая явл. просто прямой.

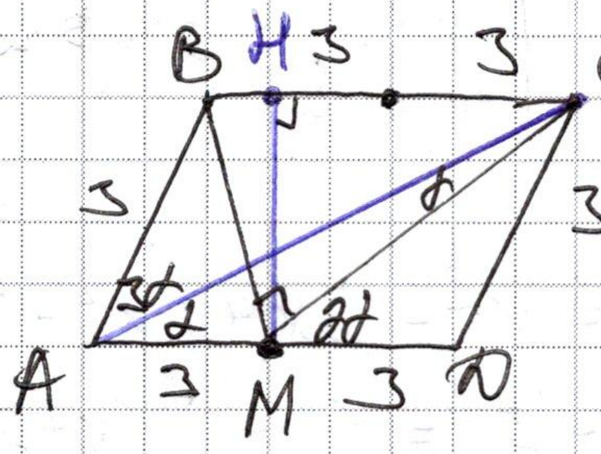
Ур-е имеет единственное отрицательное решение, т-е. при каком значении параметра a ур-е имеет единственное решение, которое отрицательно?

Посмотрим на наш график. Когда мы имеем единственное решение? Мы его имеем, когда $a^2+1=3$, но тогда мы получим, что $x=4$, т.к. в ОДЗ: $x \neq -2$

получаем тогда, что не при каких значениях a мы не имеем ед. отр. реш., т.е. $a \in \varnothing$

Ответ: $a \in \varnothing$. (Картинка должна быть именно такой, потому что если $\angle CAD = 3\alpha$, то в системе)

№3



$S(ABCD) = h \cdot 6 = MH \cdot 6$

$\exists \angle CAM = \alpha \Rightarrow \angle BAC = 3\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ABM = \angle AMB = 90 - 2\alpha$, т.к. $\triangle ABM$ – р/б, M – середина AD

$\exists \angle ACM = \beta$

$\angle MCD = \gamma$, тогда $\beta + \gamma = 3\alpha = \angle ACD = \angle BAC$ (накр.)

$\angle CMD$ – внеш. $\angle = \alpha + \beta = \gamma$, т.к. $\triangle MCD$ – р/б

$$\begin{cases} \beta+\gamma = 3\alpha \\ \alpha+\beta = \gamma \end{cases} \Rightarrow \alpha - \beta \Rightarrow \angle BMC = 180 - 2\alpha - 90 + 2\alpha = 90^\circ \Rightarrow$$

$\Rightarrow \triangle BHM \sim \triangle MHC$ по 2-м $\angle$ $\Rightarrow$ $MH = \sqrt{BH \cdot HC}$

Так как высота в $\triangle$ $\leq$ медианы, то $MH = \sqrt{BH \cdot HC} \leq 3$, т.к. медиана из $\angle = 90^\circ$ = гипотенуза/2 $\Rightarrow$ $S(ABCD) \leq 3 \cdot 6$

$S(ABCD) \leq 18$, рав-во, если $\triangle BCM$ – р/б $\Leftrightarrow 90 - 2\alpha = 2\alpha$;

$90 = 4\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{90}{4} = 22{,}5^\circ$. Ответ: $S(ABCD) \leq 18$

olymp.bmstu.ru

Продолжение №5

Мы поняли, что $\alpha = 60°$.

▷ $\triangle ABN$: $AH = NH = \frac{AC}{4} = \frac{3,2}{4} = 0,8$, т.е. $\underline{AH = 0,8}$!

В $\triangle ABH$:

$AH = 0,8$; $\angle ABH = 30° \Rightarrow AB = 1,6$

Теперь остается просто посчитать:

В $\triangle AHM$: $\angle HMA = \alpha = 60° \Rightarrow \angle HAM = 30° \Rightarrow AM = 2 \cdot HM$

В $\triangle BAH$: $AB = 1,6$; $AH = 0,8 \Rightarrow BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} =$

$= \sqrt{1,6^2 - 0,8^2} = \sqrt{0,8 \cdot 2,4} = \sqrt{4 \cdot 0,2 \cdot 0,8 \cdot 3}$

$= \sqrt{4 \cdot 0,2 \cdot 4 \cdot 0,2 \cdot 3} = 4 \cdot 0,2 \cdot \sqrt{3} = 0,8\sqrt{3}$

$AH = \sqrt{BH \cdot HM} \Rightarrow 0,8 = \sqrt{0,8\sqrt{3} \cdot HM} \Leftrightarrow 0,64 = 0,8\sqrt{3} \cdot HM$

$\Rightarrow HM = \frac{0,64}{0,8\sqrt{3}} = \frac{0,8}{\sqrt{3}} = \frac{AM}{2} \Rightarrow AM = \frac{0,8 \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{1,6}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow$ В $\triangle APM$:

$\angle APM = 30° \Rightarrow AM = \frac{MP}{2} \Rightarrow MP = 2AM = \frac{3,2}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow AP = MP \cdot \cos 30° = \frac{3,2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1,6$

	0	30	45	60	90
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

(*) Здесь PD можно было найти легче, сказав, что PACD - пар-м, т.к. $AP \parallel CD$ и $AP = CD = AB \Rightarrow AC = PD = 3,2$

$BM = BH + HM = \frac{0,8}{\sqrt{3}} + 0,8\sqrt{3} = \frac{0,8 + 0,8 \cdot 3}{\sqrt{3}} =$

$= \frac{0,8 + 2,4}{\sqrt{3}} = \frac{3,2}{\sqrt{3}} = MD$ (что уел.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow AD = AM + MD = \frac{3,2}{\sqrt{3}} + \frac{1,6}{\sqrt{3}} = \frac{4,8}{\sqrt{3}} = \frac{6 \cdot 0,8}{\sqrt{3}} =$

$= \frac{3 \cdot 2 \cdot 0,8}{\sqrt{3}} = 1,6\sqrt{3}$

$\Rightarrow$ По Th Пифагора $PD = \sqrt{AD^2 + AP^2} =$

$= \sqrt{1,6^2 \cdot 3 + 1,6^2} = \sqrt{1,6^2 \cdot 4} = 1,6 \cdot 2 = 3,2$!

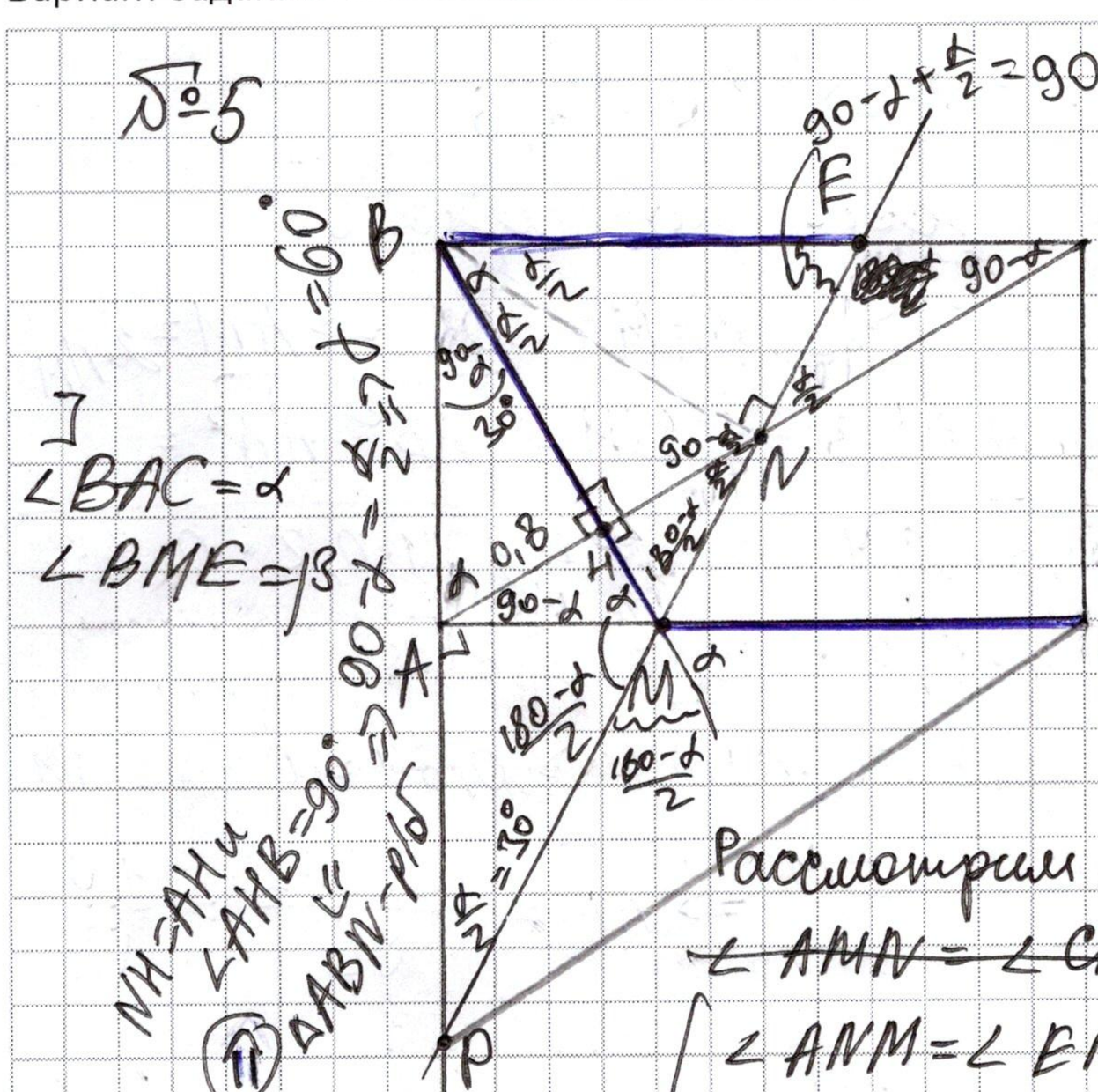
Ответ: $AH = 0,8$; $PD = 3,2$

№5

Дано:
$ABCD$ – прямоуг.
$AC = 3{,}2$

M равноудалена от точек B и D ⇒
$MD = MB$
N – середина AC

AH – ? PD – ?



Рассмотрим $\triangle ANM$ и $\triangle NEC$:

~~$\angle AMN = \angle CEN$ (накр.)~~

$\left.\begin{array}{l} \angle ANM = \angle ENC \text{ (вертик.)} \\ \angle NAM = \angle ECN \text{ (накр.)} \\ AN = NC = \frac{AC}{2} \end{array}\right| \Rightarrow \triangle ANM = \triangle NEC$

$AM = EC \Rightarrow$

$\Rightarrow BE = BC - EC = AD - AM = MD$

$\Rightarrow BE = MD = BM \Rightarrow \triangle BEM$ – р/б $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BME = \angle BEM \Leftrightarrow$

$\beta = 180 - \alpha - \beta$; $2\beta = 180 - \alpha \Rightarrow \beta = \frac{180-\alpha}{2}$

$\angle AMP = 180 - \alpha - \frac{180-\alpha}{2} = \frac{180 - 180 + \alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$

$\angle APM = 180 - 90 - \frac{180-\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$

Заметим, что

$\triangle ANM \sim \triangle BMP$ по 2-м $\angle$:

$\frac{AM}{BM} = \frac{MN}{MP} = \frac{AN}{BP}$

$\triangle AHM \sim \triangle ABH$ по 2м $\angle$:

$\frac{AH}{BH} = \frac{HM}{AH} = \frac{AM}{AB}$

$\triangle BHA \sim \triangle AHM$ (по 2-м):

$\frac{AH}{BH} = \frac{AH}{HM} = \frac{HM}{AH} \Rightarrow$

$\Rightarrow AH = \sqrt{BH \cdot HM}$

Аналогично NH ⊖

⊖ $\sqrt{HM \cdot BH}$

$\angle HMN = 180 - 90 - \frac{180-\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$

$\angle AMP = 180 - \alpha - \frac{180-\alpha}{2} = \frac{180 - 180 + \alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$

$= \frac{360 - 2\alpha - 180 + \alpha}{2} = \frac{180 - \alpha}{2}$

$\angle APM = 180 - 90 - \frac{180-\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$

$AH = \sqrt{BH \cdot HM}$

Я ранее говорил, что

$\triangle ANM = \triangle ENC \Rightarrow MN = NE \Rightarrow$

$\Rightarrow BN$ – медиана и высота, и бис

скорость их погрузки

Пусть x - С ; y - А ; z - Р : $x, y, z =$

$$\begin{cases} (x+y)\,9 = 0{,}5 & (1) \\ (y+z)\cdot 12 = 0{,}5 & (2) \\ (x+z)\cdot 18 = 0{,}5 & (3) \end{cases} = \left[\frac{к2}{мин}\right]$$

$9x + 9y + 12y + 12z = 1$

$21y + 9x + 12z = 1$

Подстав. в (3):

$$\left(\frac{5}{360} + 2z\right)18 = 0{,}5$$

$$\frac{(5 + 720z)\,18}{360} = 0{,}5$$

$$\frac{(5+720z)\cdot 9}{180} = 0{,}5$$

$$\frac{(5+720z)}{20} = 0{,}5;\quad 5 + 720z = 10$$

$$z = \frac{5}{720} = \frac{1}{144}$$

$$x = \frac{5}{360} + \frac{1}{144} = \frac{720+360}{360\cdot 144} = \frac{10\cdot 5}{720} = \frac{1080}{360\cdot 144} = \frac{2^3\cdot 3^3\cdot 5}{2\cdot 5\cdot 6^2\cdot 8\cdot 9\cdot 2}$$

$$= \frac{2^4\cdot 3^4\cdot 5}{2^7\cdot 5\cdot 3^4} = \frac{1}{2^4\cdot 3} = \frac{1}{16\cdot 3} = \frac{1}{48}$$

$$y = \frac{0{,}5 - 9x}{9} = \frac{0{,}5 - \frac{9}{48}}{9} = \frac{24-9}{48\cdot 9} = \frac{15}{48\cdot 9} = \frac{5}{3\cdot 48}$$

$$\frac{1}{x+y+z} = \frac{1}{\frac{1}{48} + \frac{5}{3\cdot 48} + \frac{1}{144}} = \frac{1}{\frac{9}{144}} = \frac{144}{9} = 16$$

Здесь выражаем x через z.

$3x + 3y = 4y + 4z$

$3x - 4z = y \quad (1) = (2)$

$(3x - 4z + z)12 = 0{,}5$

$(3x - 3z)12 = 0{,}5$

$3x - 3z = \frac{0{,}5}{12} = \frac{5}{120}$

$x - z = \frac{5}{360}$

$x = \frac{5}{360} + z$

через z выражаем др. переменную

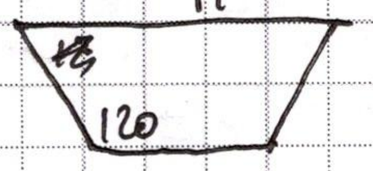
ОТВ: 16 мин

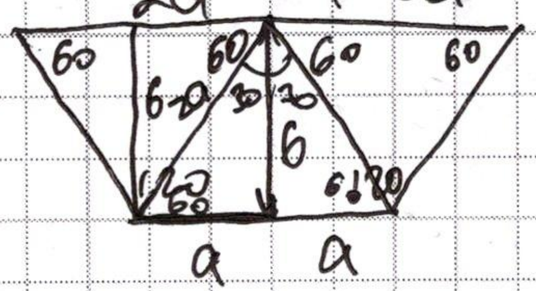
№6

Σ (стоимость) $\geq 3+4+0=7$

Σ (стоимость) $\leq$ безразлично

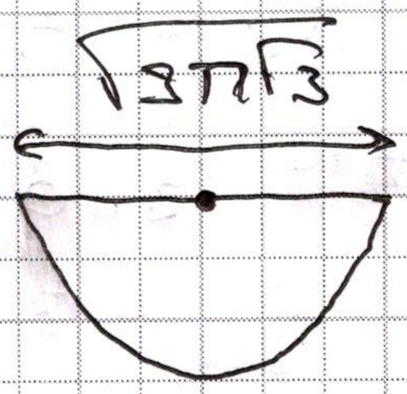
Трап: S_n^T





$= 4\sqrt{12} = S_n^T$

$= 8\sqrt{3}$



$S_n^к = \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3}\pi\sqrt{3}}{2}\right)^2$ ~~$(2a)^2 + a^2$~~ $=$

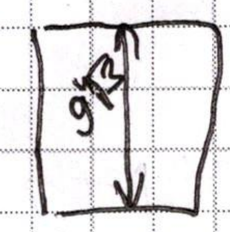
$\pi \cdot \left(\frac{3\pi\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\pi^2 3\sqrt{3}}{4}$

$36 + a^2 = 4a^2$

$36 - 3a^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 12 = a^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = \sqrt{12}$



$S_n^{кв} = (9 \cdot \sqrt{3})^2 = 81\sqrt{3}$

$S_n^к \approx 2,46 \cdot 9 \cdot 3\sqrt{3} \approx$

$\approx 7\sqrt{3}$

$150\sqrt{3} = 8\sqrt{3} + \frac{\pi^2 3\sqrt{3}}{2} + x$ ← квадратики

Т.к. $\pi^2 = 3,14^2 = 9,8596 \Rightarrow \frac{\pi^2}{2} = 4,9298$

$x = 150\sqrt{3} - 8\sqrt{3} - 4,9298 \cdot 3\sqrt{3} \approx 127\sqrt{3}$

Очевидно выгодно сначала взять $S_n^к$

$x' = 127\sqrt{3} - 81\sqrt{3} = 46\sqrt{3} = 6 \cdot 7\sqrt{3} + \frac{8\sqrt{3}}{2} =$

$= 12 + 1,5 = 13,5$

$\Sigma = 3+4+6 = 13$

$\Sigma' = 13 + 13,5 = 26,5$

Ответ: жадным алгоритмом пройдясь мы поняли, что нам потребуется 26,5 денег